



**UNIVERSITI PUTRA MALAYSIA**

**SATU KAEDAH PENGANGGARAN HASILTAMBAH EKSPONEN DUA  
PEMBOLEHUBAH**

**SITI HASANA BINTI SAPAR**

**FSAS 2001 51**

**SATU KAEDAH PENGANGGARAN HASILTAMBAH EKSPONEN DUA  
PEMBOLEHUBAH**

**SITI HASANA BINTI SAPAR**

**MASTER SAINS  
UNIVERSITI PUTRA MALAYSIA**

**2001**

**SATU KAEDAH PENGANGGARAN HASIL TAMBAH EKSPONEN DUA  
PEMBOLEHUBAH**

**Oleh**

**SITI HASANA BINTI SAPAR**

**Tesis Yang Dikemukakan Sebagai Memenuhi Keperluan Untuk Ijazah Master Sains  
di Fakulti Sains Dan Pengajian Alam Sekitar  
Universiti Putra Malaysia**

**Februari 2001**



*Salam kasih dan sayang*

*Sapar Dimen  
Aishah Kassan*

*Ajwad Abu Hassan  
Nurul Atikah*

Abstrak tesis yang dikemukakan kepada Senat Universiti Putra Malaysia  
sebagai memenuhi keperluan untuk ijazah Master Sains.

**SATU KAEDAH PENGANGGARAN HASILTAMBAH EKSPONEN  
DUA PEMBOLEHUBAH**

Oleh

**SITI HASANA BINTI SAPAR**

**Februari 2001**

**Pengerusi : Profesor Dr. Kamel Ariffin bin Mohd Atan**

**Fakulti : Fakulti Sains dan Pengajian Alam Sekitar**

Katakan  $\underline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  suatu vektor dalam ruang  $Z^n$  dengan  $Z$  menandakan gelanggang integer dan katakan  $q$  integer positif dan  $f$  suatu polinomial dalam  $\underline{X}$  berpekalikan unsur dalam  $Z$ . Hasil tambah eksponen yang disekutukan dengan  $f$  ditakrifkan sebagai  $S(f; q) = \sum e^{\frac{2\pi f(x)}{q}}$  yang dinilai bagi semua nilai  $x$  di dalam set reja lengkap modulo  $q$ .

Peranan anggaran  $S(f; q)$  adalah penting dalam beberapa bidang kajian teori nombor analisis. Ianya dapat membantu menghasilkan keputusan-keputusan yang lebih jitu dalam masalah-masalah yang berkaitan. Seperti yang telah ditunjukkan oleh beberapa penyelidik terdahulu, antaranya Loxton dan Smith, nilai  $S(f; q)$  adalah bersandar kepada penganggaran bilangan unsur  $|V|$  yang terdapat dalam set

$$V = \{ \underline{X} \bmod q \mid \underline{f}_{\underline{X}} \equiv 0 \bmod q \}$$

dengan  $\underline{f}_{\underline{X}}$  menandakan polinomial-polinomial terbitan separa  $f$  terhadap  $\underline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Kajian yang dijalankan merupakan lanjutan daripada kajian pengkaji-pengkaji dahulu. Penyelidikan ini menumpukan kepada masalah penentuan mencari pensifar dalam kes-kes berlakunya pertindihan di bucu dan sisi-sisi gambarajah penunjuk bagi polinomial berdarjah dua dan tiga, seterusnya mencari penganggaran hasil tambah eksponen bagi polinomial-polinomial tersebut. Pendekatan yang dilakukan ialah dengan menggunakan kaedah  $p$ -adic dan Teknik Polihedron Newton yang disekutukan dengan polinomial-polinomial terbitan.

Abstract of thesis presented to the Senate of Universiti Putra Malaysia in  
fulfilment of the requirement for the degree of Master of Science

**A METHOD FOR AN ESTIMATION OF EXPONENTIAL SUM  
IN TWO VARIABLES**

By

**SITI HASANA BINTI SAPAR**

**February 2001**

**Chairman : Professor Dr. Kamel Ariffin Bin Mohd Atan**

**Faculty : Faculty of Science and Environmental Studies**

Let  $\underline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  be a vector in a space  $Z^n$  with  $Z$  ring of integer and let  $q$  a positive integer and  $f$  a polynomial in  $\underline{X}$  with coefficients in  $Z$ . The exponential sum associated to  $f$  is defined as  $S(f; q) = \sum e^{\frac{2\pi i f(\underline{x})}{q}}$ , where the sum is taken over a complete set of residues modulo  $q$ .

Estimation of  $S(f; q)$  is important in several areas of Analytic Number Theory . It could help to yield a more accurate result in related problems. As shown by several previous researchers , among them Loxton and Smith, they show that the value of  $S(f; q)$  depends on the estimation of the number  $|V|$ , the number of elements contained in the set

$$V = \{\underline{X} \bmod q \mid f_{\underline{x}} \equiv 0 \bmod q\}$$

with  $f_{\underline{x}}$  as the partial derivative of  $f$  with respect to  $\underline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Our research is a continuation of research done before. This research concentrates on the problem of determining the common zeroes in cases where overlapping occurs at vertices and line segments of indicator diagrams associated for second and third degree polynomials. Subsequently estimations for of an exponential sum for these polynomials are arrived at. The approach is done by using  $p$ -adic method and the Newton Polyhedron Techniques which are associated with these polynomials.



## **PENGHARGAAN**

Dengan nama Allah yang Maha Pemurah lagi Maha Mengasihani. Kesyukuran yang tidak terhingga kehadiran Ilahi kerana dengan limpah kurnianya dapat saya menyiapkan tesis ini.

Pertama sekali jutaan terima kasih diucapkan kepada Pengerusi Jawatankuasa Penyeliaan iaitu Professor Dr. Kamel Ariffin bin Mohd Atan diatas segala kesabaran, sokongan, bantuan, dorongan dan bimbingan beliau dapat saya menyiapkan tesis ini.

Ribuan terima kasih juga diucapkan kepada Dr. Hj. Ismail bin Abdullah dan Dr. Mohd Rushdan bin Md. Said kerana bantuan dan tunjukajar yang telah mereka berikan disepanjang saya menyelesaikan tesis ini.

Akhir sekali saya ingin merakamkan penghargaan buat ahli keluarga terutamanya Ibu, Abah, suami dan anak kerana tidak jemu memberi dorongan dan semangat sehinggalah penulisan ini selesai.

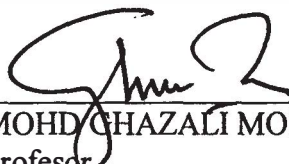
Saya mengesahkan bahawa Jawatankuasa Pemeriksa bagi Siti Hasana bt. Sapar telah mengadakan pemeriksaan akhir pada 20hb. Februari, 2001 untuk menilai tesis Master Sains beliau yang bertajuk “Satu Kaedah Penganggaran Hasil Tambah Eksponen Dua Pembolehubah” mengikut Akta Universiti Pertanian Malaysia (Ijazah Lanjutan) 1980 dan Peraturan-peraturan Universiti Pertanian Malaysia (Ijazah lanjutan) 1981. Jawatankuasa pemeriksa memperakukan bahawa calon ini layak dianugerahkan ijazah tersebut. Anggota Jawatankuasa Pemeriksa adalah seperti berikut:

Haji Harun Budin, Ph.D.  
Fakulti Sains dan Pengajian Alam Sekitar  
Universiti Putra Malaysia  
(Pengerusi)

Kamel Ariffin Mohd Atan, Ph.D.  
Fakulti Sains dan Pengajian Alam Sekitar  
Universiti Putra Malaysia  
(Ahli)

Haji Ismail Abdullah, Ph.D.  
Fakulti Sains dan Pengajian Alam Sekitar  
Universiti Putra Malaysia  
(Ahli)

Mohd Rushdan Md. Said, Ph.D.  
Fakulti Sains dan Pengajian Alam Sekitar  
Universiti Putra Malaysia  
(Ahli)

  
\_\_\_\_\_  
MOHD CHAZALI MOHAYIDIN, Ph.D.  
Profesor  
Timbalan Dekan Pengajian Siswazah  
Universiti Putra Malaysia

Tarikh : 20 MAR 2001

Tesis ini telah diserahkan kepada Senat Universiti Putra Malaysia dan telah diterima sebagai memenuhi keperluan untuk Ijazah Master Sains.

---

KAMIS AWANG, Ph.D.  
Profesor Madya  
Dekan Pusat Pengajian Siswazah  
Universiti Putra Malaysia

Tarikh :

Saya mengaku bahawa tesis ini adalah hasil kerja saya yang asli melainkan petikan dan sedutan yang telah diberikan penghargaan di dalam tesis. Saya juga mengaku bahawa tesis ini tidak dimajukan untuk ijazah-ijazah lain di Universiti Putra Malaysia atau institusi-institusi lain.



---

Siti Hasana bt. Sapar

Tarikh : 20-3-2001

## KANDUNGAN

	Muka surat
<b>DEDIKASI</b>	ii
<b>ABSTRAK</b>	iii
<b>ABSTRACT</b>	v
<b>PENGHARGAAN</b>	vii
<b>LEMBARAN PENGESAHAN</b>	viii
<b>PENYATAAN KEASLIAN</b>	x
<b>SENARAI JADUAL</b>	xiii
<b>SENARAI RAJAH</b>	xiv
<b>SENARAI SIMBOL DAN SINGKATAN</b>	xvii
 <b>BAB</b>	
 <b>I            PENGENALAN</b>	 1
Latar Belakang	1
Permasalahan	7
 <b>II            POLIHEDRON NEWTON DAN GAMBARAJAH</b>	
<b>PENUNJUK</b>	12
Polihedron Newton	12
Normal ke Polihedron Newton	20
Gambarajah Penunjuk	21
 <b>III           PENSIFAR DAN PERSILANGAN</b>	
<b>GAMBARAJAH PENUNJUK</b>	28
Pensifar	28
Persilangan Gambarajah Penunjuk	28
 <b>IV           PENGANGGARAN KEKARDINALAN SET</b>	
<b>PENYELESAIAN PERSAMAAN KONGRUEN</b>	84
Penganggaran Kekardinalan Set $V(f_x, f_y; p^\alpha)$	84
 <b>V            PENGANGGARAN HASIL TAMBAH</b>	
<b>EKSPONEN BERGANDA DALAM DUA</b>	
<b>PEMBOLEHUBAH</b>	92
Hasil Tambah Eksponen	92

<b>VI</b>	<b>KESIMPULAN DAN CADANGAN</b>	<b>104</b>
	Hasil Kajian	104
	Kesimpulan	109
	Cadangan	112
<b>BIBLIOGRAFI</b>		<b>113</b>
<b>VITA</b>		<b>116</b>

## SENARAI JADUAL

Jadual	Muka Surat
1 Permukaan maksimum yang terbentuk oleh polinomial	17

## SENARAI RAJAH

Rajah		Muka surat
1	Gambarajah Newton bagi $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^2 + 27$ dengan $p = 3$	13
2	Gambarajah Newton bagi $f(x, y) = 9x^2 + x^2y^2 + 3xy + x + 18$ dengan $p = 3$	13
3	Gambarajah Newton bagi $f(x, y) = 2x^2 + 6y^2 + 3xy + x + 9$ dengan $p = 3$	14
4	Gambarajah Polihedron Newton bagi $f(x, y) = 9 + 3x + xy$ dengan $p = 3$	15
5	Gambarajah Polihedron Newton bagi $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^2 + 27$ dengan $p = 3$	15
6	Gambarajah Polihedron Newton bagi $f(x, y) = 9x^4 + 3x^3y + xy^2 + 9xy + 3y^2 + 27$ dengan $p = 3$	16
7	Gambarajah Polihedron Newton bagi $f(x, y) = 3x^2y + xy + 3xy^2 + 9$ dengan $p = 3$	16
8	Gambarajah penunjuk yang dikaitkan dengan $N_f$ yang berasal dari polinomial $f(x, y) = 9 + 3x + xy$ dengan $p = 3$	24
9	$f(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^2 + 27$ dengan $p=3$ dengan $N_f$ dipaparkan dalam Rajah 7	25
10	$f(x, y) = 9x^4 + 3x^3y + xy^2 + 9xy + 3y^2 + 27$ dengan $p=3$ dan $N_f$ dipaparkan dalam Rajah 6	25
11	Gambarajah penunjuk bagi $f(x, y) = 8x + 5y - 15$ dan $g(x, y) = 10x + 12y + 30$ dengan titik persilangan (1,1)	30
12	Rajah 12(a) hingga 12(f) gabungan gambarajah penunjuk $f(x, y) = ax + by + c$ dan $g(x, y) = rx + sy + t$	35 – 37



12	Rajah 12(g) gabungan gambarajah penunjuk $f(x, y) = ax + by + c$ dan $g(x, y) = rx + sy + t$	40
13	Rajah 13(a) hingga 13(f) gabungan gambarajah penunjuk bagi $f(x, y) = ax^2 + by^2 + m$ dan $g(x, y) = dx^2 + ey^2 + c$	46 - 49
14	Rajah 14(a) hingga 14(c) adalah gabungan gambarajah penunjuk bagi $f_x(x, y) = 3ax^2 + by^2 + c$ dan $f_y(x, y) = 2bxy + d$	55 -56
15	Rajah 15(a) hingga Rajah 15(c), gabungan gambarajah penunjuk bagi $h(x, y) = 3ax^2 + by + d$ dan $g(x, y) = bx + c$	60 - 61
16	Gabungan gambarajah penunjuk bagi $f_x(x, y) = 3ax^2 + c$ (garis lurus) dan $f_y(x, y) = 3by^2 + d$	64
17	Gabungan gambarajah penunjuk $f_x(x, y) = 3ax^2 + 2bxy + cy^2 + e$ (garislurus) dan $f_y(x, y) = bx^2 + 2cxy + 3dy^2 + m$ (garis putus-putus)	66
18	Gabungan gambarajah penunjuk $f_x(x, y) = 3ax^2 + 2bxy + cy^2 + e$ (garislurus) dan $f_y(x, y) = bx^2 + 2cxy + 3dy^2 + m$ (garis putus-putus)	71
19	Gabungan gambarajah penunjuk bagi $G(X, Y) = aX^2 + bY^2 + 2ax_0X + 2by_0Y + f_0(x_0, y_0)$ (garis lurus) dan $H(X, Y) = dX^2 + eY^2 + 2dx_0X + 2ey_0Y + g_0(x_0, y_0)$ (garis pututs-putus)	75
20	Gabungan gambarajah penunjuk bagi $G(X, Y) = 2aX + bY + f_x(x_0, y_0)$ (garis lurus) dan $H(X, Y) = bX + 2cY + f_y(x_0, y_0)$ (garis putus-putus)	78
21	Gabungan gambarajah penunjuk $G(X, Y) = 3aX^2 + bY^2 + 6ax_0X + 2by_0Y + f_x(x_0, y_0)$ (garis lurus) $H(X, Y) = 2bXY + 2bx_0Y + 2by_0X + f_y(x_0, y_0)$	80

- 22 Gabungan gambarajah penunjuk bagi  
 $G(X, Y) = 3aX^2 + 6ax_0X + f_x(x_0, y_0)$  dan  
 $H(X, Y) = 3bY^2 + 6by_0Y + f_y(x_0, y_0)$

82

## SENARAI SIMBOL DAN SINGKATAN

$p$	Nombor perdana
$\alpha$	Eksponen nombor perdana
$\mathbb{Z}$	Gelanggang Integer
$\mathbb{Q}$	Medan Nombor Nisbah
$\mathbb{Z}_p$	Gelanggang Integer p-adic
$\mathbb{Q}_p$	Medan Nombor Nisbah p-adic
$\Omega_p$	Perluasan medan tutupan aljabar
$[\alpha]$	Integer terbesar yang kecil atau sama dengan $\alpha$
$\underline{x}$	$n$ -rangkap pembolehubah $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , $n \geq 1$
$\underline{f}$	$m$ -rangkap polinomial $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ , $m \geq 1$
darjah $\underline{f}$	Darjah polinomial $\underline{f}$
$J_{\underline{f}}$	Matriks Jacobian bagi $\underline{f}$
$\text{ord}_p a$	Kuasa tertinggi $p$ yang membahagi $a$ .
$\overline{\mathbb{Q}}_p$	Tutupan Aljabar $\mathbb{Q}_p$
$S(f; q)$	Hasil tambah eksponen
$\nabla \underline{f}$	Kecerunan $\underline{f}$
$D(\underline{f})$	Pembeza layan $\underline{f}$
$N_f$	Polihedron Newton
$V$	Bucu pada $N_f$
$E$	Sisi pada $N_f$
$L$	Unjuran sisi pada $N_f$
$\delta$	Pembeزالayan
$V(\underline{f}; p^a)$	Set $\{\underline{x} \bmod p^a : \underline{f} \equiv 0 \bmod p^a\}$

$N(\underline{f}; p^a)$	Kekardinalan bagi set $V(\underline{f}; p^a)$
$G_f(u)$	Hasil tambah Gaussian
maks	Maksimum
min	Minimum
mod	Modulo
eksp	Eksponen
$e_k(f(t))$	$e^{2\pi i f(t)/k}$
$\Sigma$	Hasil tambah
$\Delta$	Pembezalayan separa
inf	Infimum
sup	Supremum
pen $J_f$	Penentu Matriks Jacobian bagi $\underline{f}$

## BAB I

### PENGENALAN

#### Latar Belakang

Dalam Teori Nombor Analisis, ramai pengkaji telah memperihalkan peranan penting hasil tambah eksponen di antaranya ialah Davenport(1959) , Igusa(1978) dan Schmidt(1982). Hasil tambah eksponen ditakrifkan sebagai

$$S(f;q) = \sum e_q(f(\underline{x}))$$

dengan hasil tambah dinilai bagi  $\underline{x}$  dalam set lengkap reja  $\bmod q$ .

Hardy dan Littlewood (1919), Deligne (1974), Loxton dan Vaughan (1985) dan ramai lagi telah mengkaji hasil tambah  $S(f;q)$  dengan  $f$  polinomial tak linear dalam  $\mathbb{Z}[x]$ . Hasil tambah  $S(f;q)$  dalam kes satu pembolehubah telah dikaji oleh Hardy dan Littlewood (1919) berhubung dengan masalah Waring.

Pada tahun 1940, Hua telah mendapati bahawa untuk sebarang  $\varepsilon > 0$ , maka

$$|S(f;q)| \leq cp^{1-\left(\frac{1}{m}\right)^{\varepsilon}}$$

dengan  $c$  pemalar yang bersandar kepada  $m$  dan  $\varepsilon$  sahaja. Keputusan Hua telah diperbaiki oleh Jing-Run Chen (1977) yang menunjukkan bahawa jika kandungan bagi  $f - f(0)$  perdana relatif terhadap  $q$ , maka

$$|S(f;q)| \leq e^{7(n+1)} q^{1-\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

Anggaran Hua telah digunakan oleh Stechkin (1980) bagi menunjukkan bahawa

$$|S(f; q)| \leq c^m q^{1-\frac{1}{m}} (c(f), q)^{\frac{1}{m}}$$

untuk pemalar mutlak positif  $c$  tertentu, dengan  $c(f)$  menandakan kandungan bagi  $f - f(0)$ .

Pada tahun 1974 pula Deligne menunjukkan bahawa untuk suatu nombor perdana  $p$ ,

$$|S(f; p)| \leq (m-1)^n p^{\frac{n}{2}}$$

dengan  $m$  menyatakan jumlah darjah bagi sesuatu polinomial  $f$ , apabila bahagian homogen bagi  $f$  berdarjah terbesar tak singular modulo  $p$ . Kajian Deligne ini membuka jalan bagi mendapatkan anggaran yang lebih tepat bagi  $|S(f; q)|$  untuk polinomial  $f$  dalam beberapa pembolehubah. Contohnya pada tahun 1985, Loxton dan Vaughan telah mendapat anggaran yang lebih tepat bagi hasil tambah  $|S(f; q)|$ . Walaubagaimanapun keputusan yang umum bagi polinomial untuk beberapa pembolehubah masih lagi dalam pencarian.

Peranan Poligon Newton bagi mendapatkan sifat-sifat pensifar polinomial dalam satu pembolehubah telah diketahui umum. Misalnya dalam membuktikan Teorem Puiseux, iaitu dalam memperkembangkan siri kuasa bagi fungsi algebra, Poligon Newton telah digunakan. Sathye (1983) juga menggunakan kembangan am Newton Puiseux, walaupun dengan menggunakan kaedah yang berlainan. Loxton

dan Smith (1986) telah mengkaji penggunaan Poligon Newton bagi mendapatkan keputusan yang sama dengan Sathye(1983).

Dalam kes  $p$ -adic pula, Poligon Newton dapat menghasilkan maklumat yang lengkap mengenai saiz dan bilangan pensifar bagi polinomial satu pembolehubah dengan pekali dalam  $\Omega_p$  iaitu tutupan aljabar bagi medan nombor  $p$ -adic  $\mathcal{Q}_p$ .

Pada tahun 1977 pula Koblitz memperkenalkan Poligon Newton dalam kes  $p$ -adic bagi polinomial siri kuasa dalam  $\Omega_p[x]$  dengan  $\Omega_p$  perluasan medan tutupan aljabar bagi  $\mathcal{Q}_p$ . Beliau menunjukkan bahawa jika  $\lambda$  kecerunan bagi suatu tembereng pada Poligon Newton bagi suatu polinomial  $f$  dengan beza  $N$ , antara ordinat-ordinat- $x$  titik hujung tembereng itu, maka terdapat  $N$  pensifar bagi  $f$  dengan peringkat  $p$ -adic -  $\lambda$ .

Bagi sebarang perdana  $p$ , tuliskan  $\underline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  untuk menandakan vektor  $n$ -polinomial dengan pekali dalam  $Z_p$  set integer  $p$ -adic dan  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Pertimbangkan

$$V(f; p^\alpha) = \{\underline{u} \bmod p^\alpha \mid f(\underline{u}) \equiv 0 \bmod p^\alpha\}$$

dan biarkan  $N(\underline{f}; p^\alpha)$  menandakan kekardinalan bagi  $V(f; p^\alpha)$  dengan  $\alpha > 0$

dan  $\underline{u}$  mengambil nilai dalam set reja lengkap modulo  $p^\alpha$ .

Loxton dan Smith (1982) mengkaji penggunaan Poligon Newton dan memperoleh keputusan yang berikut :

Katakan  $K$  medan nombor aljabar yang dijanakan oleh  $\xi_i$  pensifar kepada  $f(x)$  dalam  $Z[x]$  dengan  $1 < i \leq m$ , maka

$$N(f; p^\alpha) \leq mp^{\alpha - (\alpha - \delta)/e}$$

jika  $\alpha > \delta$ . Di sini  $m$  adalah bilangan punca yang berlainan  $f(x)$  dan  $\delta = \text{ord}_p D(f)$  dengan  $D(f)$  merupakan persilangan unggulan pecahan  $K$  yang dijana oleh

$$\frac{f^{(e_i)}(\xi_i)}{e_i!}, \quad i > 1$$

dengan  $e_i$  gandaan pensifar  $\xi_i$ .

Dengan menggunakan Lema Hensel, Chalk dan Smith (1982) memperoleh hasil yang berbentuk sama dengan  $\delta = \max \text{ord}_p f_i$  dengan  $f_i$  pekali Taylor

$$\frac{f^{(e_i)}(\xi_i)}{e_i!}$$

pada pensifar-pensifar yang berlainan  $\xi_i$ .

Loxton dan Smith (1982) pula menunjukkan bahawa bagi  $\underline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$

$$N(f; p^\alpha) \leq \begin{cases} p^{n\alpha} & \text{jika } \alpha \leq 2\delta \\ (Darjh \underline{f}) p^\alpha & \text{jika } \alpha > 2\delta \end{cases}$$

dengan  $\delta = \text{ord}_p \Delta(\underline{f})$  dengan  $\Delta(\underline{f})$  menandakan pembezalayan  $\underline{f}$ .



Mohd Atan dan Loxton (1986) memperkembangkan idea poligon Newton dalam kes  $p$ -adic dalam dua pembolehubah dan dikenali sebagai Kaedah Polihedron Newton. Kaedah ini telah digunakan oleh para pengkaji diantaranya Mohd Atan (1986) , Abdullah (1992) , Chan (1997) dan Heng (1999). Berikut adalah diantara keputusan yang telah diperolehi untuk mendapatkan penganggaran hasil tambah dengan menggunakan kaedah polihedron Newton.

Katakan  $A$  perwakilan matriks bagi polinomial linear  $\underline{f}$  dengan pekali dalam gelanggang  $p$ -adic  $Z_p$  dan  $\alpha > 0$  , Mohd Atan (1988) menunjukkan bahawa

$$N(f_x, f_y; p^\alpha) \leq \begin{cases} p^{2\alpha} & \text{jika } \alpha \leq \delta \\ p^{(n-r)\alpha + r\delta} & \text{jika } \alpha > \delta \end{cases}$$

dengan  $\delta$  minimum peringkat  $p$ -adic bagi  $r \times r$  submatrik tak singular bagi  $A$ .

Beliau juga menunjukkan kes khusus iaitu apabila  $n = 2$  maka

$$N(f_x, f_y; p^\alpha) \leq \begin{cases} p^{2\alpha} & \text{jika } \alpha \leq \delta \\ p^{2\delta} & \text{jika } \alpha > \delta \end{cases}$$

dengan  $f$  dan  $g$  polinomial linear dalam  $Z_p[x, y]$  dengan  $\alpha > 0$  dan  $\delta = \text{ord}_p J_{fg}$  ,  
iaitu peringkat  $p$ -adic bagi Jacobian  $f$  dan  $g$  .

Seterusnya Mohd Atan (1988) mengkaji polinomial  $\underline{f} = (f_x, f_y)$  dengan  $f_x, f_y$  pembezaan separa terhadap  $x$  dan  $y$  bagi polinomial